

## DISTRIBUCIÓN DE POTENCIA ELECTROMAGNÉTICA EN UN RECINTO METÁLICO

## DISTRIBUTION OF ELECTROMAGNETIC POWER WITHIN A METALLIC ENCLOSURE

EVARISTO MAMANI<sup>†</sup> & DIEGO SANJINÉS C.<sup>††</sup>

Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física  
Universidad Mayor de San Andrés

c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8639  
La Paz – Bolivia

(Recibido 3 de agosto de 2011; aceptado 30 de septiembre de 2011)

### RESUMEN

En este trabajo se estudia la distribución de potencia electromagnética en el interior de un recinto metálico con una apertura sobre la que incide una onda monocromática plana desde el exterior. Se utiliza el método de reemplazar a la apertura como fuente de los campos eléctrico y magnético calculando las correspondientes corrientes eléctrica y magnética; este método analítico conduce directamente a potenciales vectoriales de los que se obtiene los campos eléctrico y magnético, y luego el promedio temporal del vector de Poynting que produce un “mapa” de la distribución de potencia electromagnética en el interior del recinto. La “apertura radiante” se modela por una guía de ondas rectangular a fin de lograr consistencia con las condiciones de contorno apropiadas. Las expresiones analíticas obtenidas se evalúan numéricamente para obtener dicho mapa así como para verificar los resultados conocidos del límite de longitud de onda pequeña y de longitud de onda comparable al tamaño de la apertura. Asimismo se verifica el resultado para la condición trivial de una apertura de dimensiones nulas (jaula de Faraday). Los resultados generales de este trabajo son satisfactorios y permiten su verificación experimental.

*Descriptor:* electromagnetismo clásico aplicado — propagación de ondas electromagnéticas — guías de onda

Código(s) PACS: 41.20.q, 41.20.Jb, 84.40.Az

### ABSTRACT

We study the distribution of electromagnetic power within a metallic enclosure when exposed to a monochromatic plane wave that passes through a slit located on the enclosure. We use the method of replacing the slit with a source of electric and magnetic fields and calculate the corresponding currents. This analytical method yields the vector potentials and the fields, and thereafter we calculate the time-average of the Poynting vector, which allows to draw a “map” of the electromagnetic power within the enclosure. The model for the “radiant slit” is a rectangular wave guide so that the appropriate boundary conditions are satisfied. The analytical expressions produced by this work are evaluated numerically to obtain the “map”, as well as to verify the known limiting cases of small wavelength and a wavelength comparable in size to the slit dimensions. When the slit has a null size we obtain the Faraday cage effect, as expected. The general results of this work are satisfactory and allow for their experimental verification.

*Subject headings:* applied classical electromagnetism — electromagnetic wave propagation — waveguides

### 1. INTRODUCCIÓN

Cualquier equipo electrónico que se encuentra en un ambiente electromagnético está sujeto a perturbaciones de diferente naturaleza. Usualmente se uti-

liza blindajes metálicos para proteger dicho equipo. El caso ideal es el conocido como “Jaula de Faraday”, que anula la componente eléctrica del campo en el interior del recinto por lo que la potencia correspondiente es cero. Cuando existen aperturas en el recinto la onda electromagnética penetra en su interior y puede afectar al equipo electrónico. Este es el motivo

<sup>†</sup>evaristomamani@gmail.com

<sup>††</sup>diegosanjinescastedo@gmail.com

que inspira este trabajo pues se investigará cómo se distribuye la potencia electromagnética adentro del recinto por causa de las aperturas.

Existen modelos analíticos (ver, por ejemplo, Ali et al. 2005) y numéricos (Cerri & Primiani 1992) para calcular la efectividad de un blindaje. El resultado presentado por Bethe (Bethe 1944) para un pequeño agujero afirma que la eficiencia del blindaje se verá notablemente reducida. Su solución sólo se aplica a geometrías simples (McDonald 1985) para formas más complejas de aperturas se necesitan técnicas numéricas (Arvas & Harrington 1983). Un método analítico simple acude a un modelo de líneas de transmisión donde el recinto en forma de caja rectangular se considera como una guía de ondas (Robinson et al. 1996 y Dawson et al. 1998). Así, el voltaje y corriente en un punto dado del circuito de la línea de transmisión equivalen al campo eléctrico y magnético respectivamente en ese punto.

Las formulaciones analíticas coinciden razonablemente bien con las simulaciones numéricas en el cálculo de la eficiencia de un blindaje. Se puede mencionar: el método de elementos finitos, el método de dominio-tiempo de diferencias finitas, el método de los momentos (Kimmel & Singer 1995 y Wallyn & Zutter 2001), el método de la línea de transmisión, y métodos híbridos. Asimismo existen paquetes computacionales para calcular la eficiencia de un blindaje, por ejemplo Emap5<sup>1</sup>.

En este trabajo se utiliza la teoría electromagnética (ecuaciones de Maxwell) para la determinación de los campos eléctrico y magnético en función de sus correspondientes potenciales vectoriales. Se utiliza asimismo el método de momentos junto al método de Galerkin a fin de acoplar los campos eléctrico y magnético y garantizar su continuidad en la apertura. Aunque el método general utilizado en este trabajo permite modelar un recinto metálico de cualquier forma y con un número arbitrario de aperturas, por razones de simplicidad consideraremos sólo el modelo elemental de un recinto en forma de un paralelepípedo recto con una apertura rectangular, pues éste conserva las características que serán esenciales en el tratamiento de un problema más general. En lo que respecta a la onda electromagnética incidente, se considerará una onda plana que tiene una dirección y orientación arbitrarias, así como cualquier frecuencia. En la sección 2 se describe el modelo del paralelepípedo recto (aún con varias aperturas) y se propone la aproximación de tratar a la apertura rectangular como si fuera una guía de ondas. En la sección 3 se desarrolla de manera concisa la relación fundamental entre los potenciales vectoriales eléctrico y magnético y los campos correspondientes. La sección 4, que es el núcleo de este trabajo, comprende el desarrollo analítico de las expresiones para los campos con las que se calculará la potencia electromagnética promedio en el interior del recinto. En la sección 5 se reporta los resultados de aplicar numéricamente las expresiones calcu-

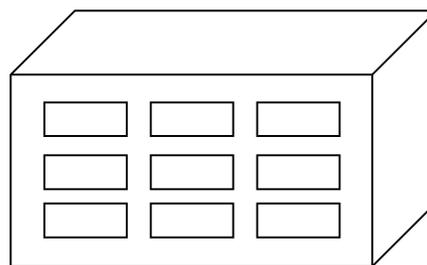


FIG. 1.— Geometría de un recinto metálico (paralelepípedo recto) con aperturas rectangulares

ladas en la sección 4 a los casos de incidencia normal e incidencia oblicua de la onda electromagnética sobre la apertura del recinto. En la sección 6 se describe un procedimiento heurístico para simular numéricamente el problema central de este trabajo y así disponer de otro método para confirmar, hasta donde lo permitirían las aproximaciones supuestas, las predicciones físicas anunciadas en los resultados.

## 2. FORMULACIÓN Y MODELADO DEL PROBLEMA

Considere un recinto metálico en forma de un paralelepípedo recto con aperturas rectangulares ubicadas en la cara frontal donde incide una onda electromagnética plana y monocromática. El problema consiste de la determinación de los campos eléctrico ( $\vec{E}$ ) y magnético ( $\vec{H}$ ), y de aquí calcular la distribución de potencia electromagnética ( $\vec{S} \propto \vec{E} \times \vec{H}$ ) en dicho recinto. La onda puede incidir desde cualquier dirección y tener cualquier orientación espacial.

En las ecuaciones de Maxwell los campos ( $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ ) se relacionan con las cargas y corrientes eléctricas ( $\rho$  y  $\vec{J}$ ), pero no existen los equivalentes de cargas y corrientes magnéticas de conducción ( $\rho_m$  y  $\vec{M}$ ). Las ecuaciones permiten explicar la totalidad de los fenómenos de radiación, pero en algunos casos, como el de las antenas de apertura, conviene sustituir los campos eléctricos y magnéticos por fuentes equivalentes (ver, por ejemplo, Collin 1980). La introducción del concepto de corriente magnética simplifica los cálculos, como por ejemplo en las espiras donde el problema del hilo eléctrico circular podría estudiarse como una corriente magnética perpendicular a la superficie que contiene a la espira.

En la Figura 1, la onda incidente plana induce campos eléctricos sólo en las aperturas, pero se anulan en las demás regiones del metal. Se utilizará entonces el modelo de aproximación propuesto por Ali (Ali et al. 2005) para los campos eléctricos en las aperturas como si éstas fueran guías de onda rectangulares.

## 3. ASPECTOS PRELIMINARES: DETERMINACIÓN DE LOS CAMPOS USANDO POTENCIALES VECTORIALES

Las fuentes de radiación pueden ser de dos tipos: vector densidad de corriente eléctrica ( $\vec{J}$ ) y vector densidad de corriente magnética ( $\vec{M}$ ). Algunos problemas que involucran corrientes eléctricas pueden ser proyectados en forma equivalente a problemas

<sup>1</sup> Disponible en <http://www.emclab.umr.edu/emap5/>

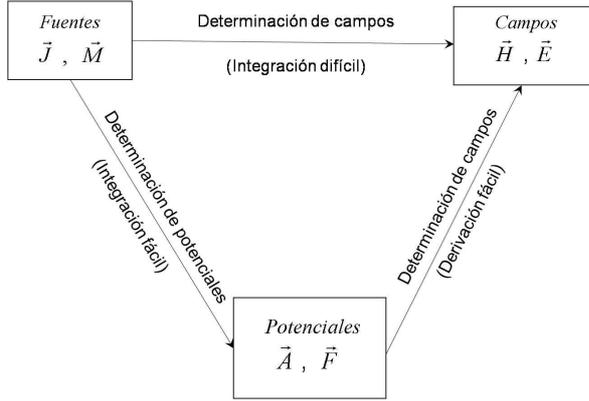


FIG. 2.— Relación entre los potenciales vectoriales magnético y eléctrico ( $\vec{A}$  y  $\vec{F}$ ) para determinar los correspondientes campos ( $\vec{H}$  y  $\vec{E}$ ) en función de las fuentes magnética y eléctrica ( $\vec{J}$  y  $\vec{M}$ ).

que involucran corrientes magnéticas como afirma Collin (Collin 1980; el uso de corrientes magnéticas es simplemente una herramienta matemática, aunque tales corrientes no existan). La figura 2 muestra los caminos por los cuales pueden tratarse los problemas electromagnéticos que involucran campos de radiación. La fuente  $\vec{J}$  produce el potencial vectorial magnético ( $\vec{A}$ ) y la fuente  $\vec{M}$  produce el potencial vectorial eléctrico ( $\vec{F}$ ).

Dentro de la aproximación de ondas planas y monocromáticas, se puede proponer como solución de las ecuaciones de Maxwell (Jackson 1996):

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}, \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)},\end{aligned}\quad (1)$$

de tal forma que dichas ecuaciones se reescriben como:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= \rho, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= \rho_m, \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + i\omega\vec{D}, \\ \nabla \times \vec{E} &= -i\omega\vec{B} - \vec{M}.\end{aligned}\quad (2)$$

Recordemos que el uso de los potenciales en la determinación de los campos permite aplicar el principio de superposición, es decir, los campos totales ( $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ) en algún punto específico resultan de la suma de los campos debidos a las corrientes eléctricas ( $\vec{E}_A$ ,  $\vec{H}_A$ ) y los campos debidos a las corrientes magnéticas ( $\vec{E}_F$ ,  $\vec{H}_F$ ):

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_A + \vec{E}_F, \\ \vec{H} &= \vec{H}_A + \vec{H}_F,\end{aligned}\quad (3)$$

donde  $\vec{E}_A$  y  $\vec{H}_A$  resultan del potencial vectorial magnético  $\vec{A}$  (que se obtiene de las fuentes eléctricas  $\vec{J}$  y  $\rho$ ) y  $\vec{E}_F$  y  $\vec{H}_F$  resultan del potencial vectorial eléctrico  $\vec{F}$  (que se obtiene de las fuentes magnéticas  $\vec{M}$  y  $\rho_m$ ).

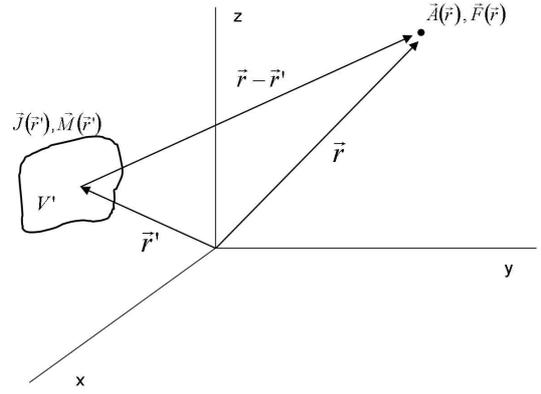


FIG. 3.— Potenciales vectoriales magnético y eléctrico ( $\vec{A}$  y  $\vec{F}$ ) generados por las fuentes magnética y eléctrica ( $\vec{J}$  y  $\vec{M}$ ) distribuidas en la región finita  $V'$ .

Si se combina las ecuaciones de Maxwell (2) para el caso eléctrico ( $\vec{F} = \vec{M} = \vec{0}$ ,  $\rho_m = 0$ ) y para el caso magnético ( $\vec{A} = \vec{J} = \vec{0}$ ,  $\rho = 0$ ), y además se utiliza el calibre de Lorentz (ver, por ejemplo, Jackson 1996), se obtiene las ecuaciones de onda vectoriales inhomogéneas de Helmholtz:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} &= -\mu \vec{J}, \\ \nabla^2 \vec{F} + k^2 \vec{F} &= -\epsilon \vec{M},\end{aligned}\quad (4)$$

cuyas soluciones tienen la forma usual (ver, por ejemplo, Khan et al. 2005):

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV', \\ \vec{F}(\vec{r}) &= \frac{\epsilon}{4\pi} \int_{V'} \vec{M}(\vec{r}') \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV';\end{aligned}\quad (5)$$

la región de integración correspondiente se indica en la figura 3.

#### 4. DESARROLLO DEL MODELO

En una guía de ondas rectangular de dimensiones  $L \times W$  las componentes del campo eléctrico transversal están dadas por (ver, por ejemplo, Wangsness 1994):

$$\begin{aligned}E_x &= E_{0x} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right), \\ E_y &= E_{0y} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right), \\ E_z &= 0.\end{aligned}\quad (6)$$

Por lo tanto, el campo eléctrico en las aperturas se expresará en forma similar al de una guía de ondas rectangular, cuyas amplitudes deberán ser determinadas de acuerdo a las condiciones de contorno del problema original. Así, después de trasladar el origen del sistema de coordenadas  $(x, y)$  al centro de la apertura  $(x_{cr}, y_{cr})$  como se muestra en la figura 4, se obtiene el campo eléctrico en la apertura:

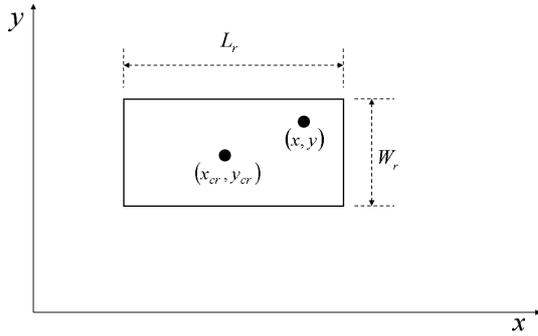


FIG. 4.— Coordenadas del centro de la  $r$ -ésima apertura y de un punto arbitrario de la apertura.

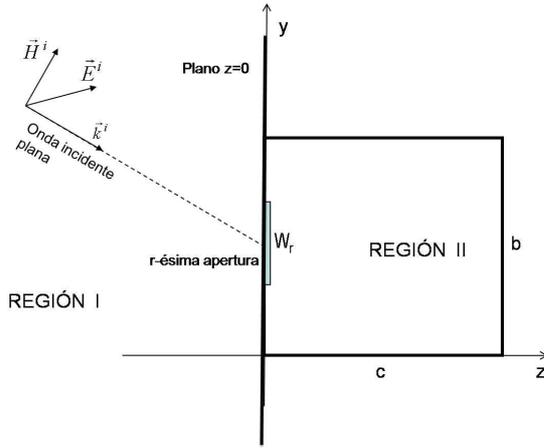


FIG. 5.— Corte lateral (en  $x = 0$ ) del recinto metálico cuyo interior es la REGIÓN II y cuyo exterior es la REGIÓN I; se aprecia las componentes eléctrica y magnética de la onda incidente plana sobre la  $r$ -ésima apertura.

$$\begin{aligned} \vec{E}^A &= \sum_r \left\{ \sum_{p,q} V_{rpq} \cos\left[\frac{p\pi}{L_r}\left(\frac{L_r}{2} + x - x_{cr}\right)\right] \right. \\ &\quad \times \left. \sin\left[\frac{q\pi}{W_r}\left(\frac{W_r}{2} + y - y_{cr}\right)\right] \hat{i} \right. \\ &\quad + \sum_{p,q} U_{rpq} \sin\left[\frac{p\pi}{L_r}\left(\frac{L_r}{2} + x - x_{cr}\right)\right] \\ &\quad \times \left. \cos\left[\frac{q\pi}{W_r}\left(\frac{W_r}{2} + y - y_{cr}\right)\right] \hat{j} \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

donde:  $U_{rpq}, V_{rpq}$  son las amplitudes de los  $p, q$ -ésimos modos correspondientes a la  $r$ -ésima apertura (diferente de cero en las aperturas y cero en otro lugar);  $L_r, W_r$  son el largo y ancho de la  $r$ -ésima apertura;  $R$  es el número total de aperturas y  $(x_{cr}, y_{cr})$  es la coordenada del centro de la  $r$ -ésima apertura.

Usando el teorema de equivalencia (Apéndice A) se puede reemplazar los campos en las aperturas dados en (7) por las siguientes corrientes magnéticas equivalentes:

$$\begin{aligned} \vec{M}^A &= \hat{n} \times \vec{E}^A = -\hat{k} \times \vec{E}^A \\ &= -\hat{k} \times \sum_r \sum_{p,q} [\hat{i} V_{rpq} \Phi_{rpqy} + \hat{j} U_{rpq} \Psi_{rpqx}] \\ &= \sum_{r,p,q} [\hat{i} U_{rpq} \Psi_{rpqx} - \hat{j} V_{rpq} \Phi_{rpqy}] \\ &= \sum_{\alpha} [\hat{i} U_{\alpha} \Psi_{\alpha x} - \hat{j} V_{\alpha} \Phi_{\alpha y}], \end{aligned} \quad (8)$$

donde  $\alpha$  es la triada de índices  $(r, p, q)$  que se suman y:

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha x} &= \sin\left[\frac{p\pi}{L_r}\left(\frac{L_r}{2} + x - x_{cr}\right)\right] \cos\left[\frac{q\pi}{W_r}\left(\frac{W_r}{2} + y - y_{cr}\right)\right], \\ \Phi_{\alpha y} &= \cos\left[\frac{p\pi}{L_r}\left(\frac{L_r}{2} + x - x_{cr}\right)\right] \sin\left[\frac{q\pi}{W_r}\left(\frac{W_r}{2} + y - y_{cr}\right)\right], \end{aligned} \quad (9)$$

tal que  $U_{\alpha}, V_{\alpha} \neq 0$  si  $(x, y) \in$  apertura y  $U_{\alpha}, V_{\alpha} = 0$  si  $(x, y) \notin$  apertura (donde “apertura” es la región definida en términos de  $L_r$  y  $W_r$  en la figura 4).

El problema de determinar el campo electromagnético para un recinto rectangular con aperturas puede ser dividido en dos regiones: región I ( $z \leq 0$ ) que es la región externa al recinto donde se tiene el campo incidente (todas las cantidades con superíndice “ $i$ ”) y el campo reflejado (todas las cantidades con superíndice “ $r$ ”) y por otra parte la región II ( $0 < z \leq c$ ) que es la región interna al recinto donde se tiene el campo transmitido (todas las cantidades sin superíndices). Esto se muestra en la figura 5 en una vista lateral.

El problema en el interior del recinto es similar al de una cavidad resonante rectangular que es irradiada por varias fuentes de corrientes magnéticas equivalentes. El problema externo consiste de fuentes de corrientes magnéticas equivalentes situadas en el plano  $z = 0$  que se supone infinito; los valores de las amplitudes  $U_{\alpha}, V_{\alpha}$  son determinados por el acoplamiento de las ecuaciones en las regiones I y II.

#### 4.1. Campo electromagnético afuera del recinto

El campo electromagnético afuera del recinto se obtiene a través de la superposición del campo incidente y del campo debido a la radiación en las aperturas.

A continuación se calculará el campo electromagnético debido a una onda incidente plana para cualquier ángulo de incidencia y orientación. Supondremos que una onda plana armónica irradia el recinto como se muestra en la figura 6.

El campo magnético incidente puede ser escrito como:

$$\vec{H}^i = (H_{\theta}^i \hat{\theta}^i + H_{\phi}^i \hat{\phi}^i) e^{-i \vec{k}^i \cdot \vec{r}}, \quad (10)$$

cuyas componentes cartesianas son:

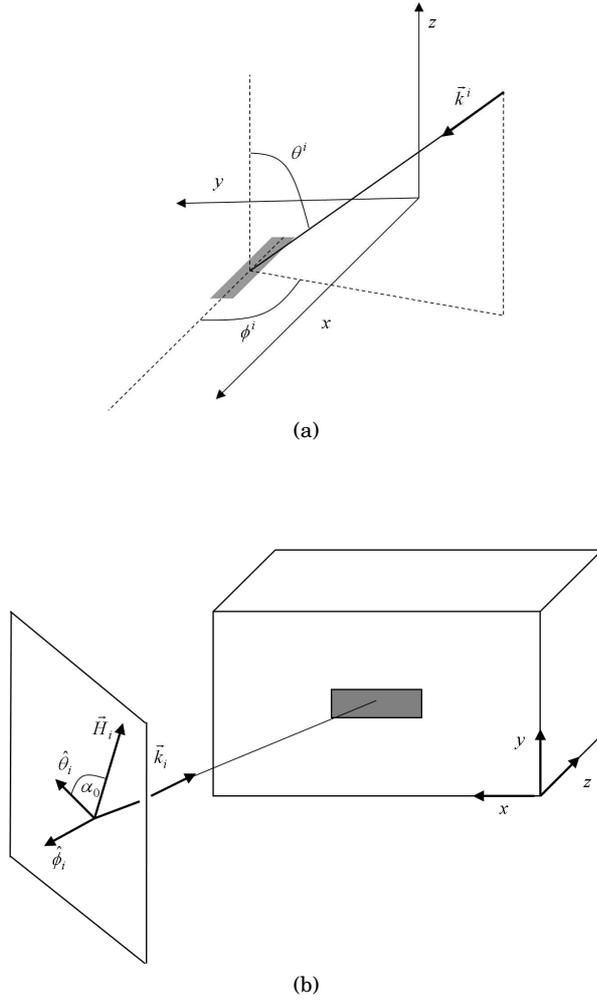


FIG. 6.— Representación tridimensional de la figura 5; en este caso se especifica los ángulos  $\theta^i$  y  $\phi^i$  de la dirección de incidencia de la onda plana (grafico a) y sus correspondientes vectores unitarios  $\hat{\theta}^i$  y  $\hat{\phi}^i$  (grafico b).

$$\begin{aligned}
 H_x^i &= H^i (\cos \alpha_0^i \cos \theta^i \cos \phi^i - \sin \alpha_0^i \sin \phi^i) e^{-i\vec{k}^i \cdot \vec{r}}, \\
 H_y^i &= H^i (\cos \alpha_0^i \cos \theta^i \sin \phi^i + \sin \alpha_0^i \cos \phi^i) e^{-i\vec{k}^i \cdot \vec{r}}, \\
 H_z^i &= -H^i \cos \alpha_0^i \sin \theta^i e^{-i\vec{k}^i \cdot \vec{r}},
 \end{aligned} \tag{11}$$

donde:  $k_0$  es el número de onda (con  $\vec{k}^i = k_0 \hat{k}^i$ ),  $\phi^i$

y  $\theta^i$  son los ángulos de incidencia, y  $\alpha_0^i$  es el ángulo de orientación. Las expresiones en (11) se obtuvieron haciendo una transformación simple de coordenadas esféricas a cartesianas. Para calcular la radiación del campo debido a las aperturas (campo reflejado), considérese la apertura situada sobre el plano  $z = 0$ ; el campo debido a la corriente magnética  $\vec{M}$  se puede obtener a partir del potencial vectorial eléctrico  $\vec{F}^r$  como se afirma en (Jackson 1996) y en (Khan et al. 2005):

$$\begin{aligned}
 \vec{E}^r(\vec{M}_r) &= -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{F}^r, \\
 \vec{H}^r(\vec{M}_r) &= -i\omega(\vec{F}^r + \frac{1}{k_0^2} \nabla(\nabla \circ \vec{F}^r)),
 \end{aligned} \tag{12}$$

donde  $\vec{F}^r$  está dado por:

$$\vec{F}^r = \frac{\epsilon_0}{4\pi} \int 2\vec{M}_r \frac{e^{-ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} ds, \tag{13}$$

con  $ds = dx'dy'$  el área infinitesimal de la apertura; el factor 2 se debe al reflejo de la densidad de corriente magnética tanto externa ( $z \leq 0$ ) como interna ( $0 < z \leq c$ ); (ver, por ejemplo, Balanis 1985 cap. 12) y (Chalmer et al. 1978) recordemos que en la derivación de las ecuaciones para el campo electromagnético no se consideró fronteras o contornos, por lo que se supuso que el plano  $z = 0$  es infinito, lo que para fines de nuestro problema es una buena aproximación (Sewell et al. 1998) y (Gardner & Costache 1995).

A fin de resolver la integral en (13), aplicaremos la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{-ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \frac{e^{-k_z|z-z'|}}{k_z} \\
 &\times e^{-ik_x(x-x')-ik_y(y-y')},
 \end{aligned} \tag{14}$$

que se sustituye en (13), junto con  $k_0^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$  ( $k_0$  es el número de onda en el espacio libre). Así, las componentes cartesianas de  $\vec{F}^r$  en (13) son:

$$\begin{aligned}
 F_x^r &= \frac{\epsilon_0}{4\pi^2} \int dk_x dk_y \frac{e^{-ik_z|z|}}{ik_z} e^{-i(k_x x + k_y y)} \sum_{\alpha} \int ds e^{i(k_x x' + k_y y')} U_{\alpha} \Psi_{\alpha x} \\
 F_y^r &= -\frac{\epsilon_0}{4\pi^2} \int dk_x dk_y \frac{e^{-ik_z|z|}}{ik_z} e^{-i(k_x x + k_y y)} \sum_{\alpha} \int ds e^{i(k_x x' + k_y y')} V_{\alpha} \Phi_{\alpha y}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
E_x^r &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\alpha} V_{\alpha} \int dk_x dk_y e^{-ik_z|z|} \phi_{\alpha y} e^{-i(k_x x + k_y y)}, \\
E_y^r &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\alpha} U_{\alpha} \int dk_x dk_y e^{-ik_z|z|} \psi_{\alpha x} e^{-i(k_x x + k_y y)}, \\
E_z^r &= -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{\alpha} \int dk_x dk_y e^{-ik_z|z|} \left( \frac{V_{\alpha} \phi_{\alpha y} k_x + U_{\alpha} \psi_{\alpha x} k_y}{k_z} \right) e^{-i(k_x x + k_y y)}, \\
H_x^r &= -\frac{\omega \epsilon_0}{4\pi^2 k_0^2} \sum_{\alpha} \int dk_x dk_y e^{-ik_z|z|} e^{-i(k_x x + k_y y)} \left[ U_{\alpha} \psi_{\alpha x} \left( \frac{k_0^2 - k_x^2}{k_z} \right) - V_{\alpha} \phi_{\alpha y} \left( \frac{k_x k_y}{k_z} \right) \right], \\
H_y^r &= \frac{\omega \epsilon_0}{4\pi^2 k_0^2} \sum_{\alpha} \int dk_x dk_y e^{-ik_z|z|} e^{-i(k_x x + k_y y)} \left[ V_{\alpha} \phi_{\alpha y} \left( \frac{k_0^2 - k_y^2}{k_z} \right) - U_{\alpha} \psi_{\alpha x} \left( \frac{k_x k_y}{k_z} \right) \right], \\
H_z^r &= -\frac{\omega \epsilon_0}{4\pi^2 k_0^2} \sum_{\alpha} \int dk_x dk_y e^{-ik_z|z|} (-k_x U_{\alpha} \psi_{\alpha x} + k_y V_{\alpha} \phi_{\alpha y}) e^{-i(k_x x + k_y y)}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Estas expresiones en (16) se obtuvieron utilizando las ecuaciones (12) que dan los campos en función del potencial vectorial eléctrico (15). Además en (16) se utilizó el resultado de las transformadas de Fourier:

$$\begin{aligned}
\phi_{\alpha y}(k_x, k_y) &= \int dS \Phi_{\alpha y} e^{ik_x x' + ik_y y'}, \\
\psi_{\alpha x}(k_x, k_y) &= \int dS \Psi_{\alpha x} e^{ik_x x' + ik_y y'}.
\end{aligned} \tag{17}$$

En el apéndice B se muestra el cálculo completo.

#### 4.2. Campo electromagnético adentro del recinto

Las corrientes magnéticas equivalentes sobre las aperturas irradian campos electromagnéticos adentro del recinto, por lo que el campo en algún punto interior se obtiene por la superposición de los campos debidos a cada fuente de corriente magnética equivalente. De este modo el campo debido a la  $r$ -ésima apertura tendrá la forma de las ecuaciones (12). Sin embargo, el potencial vectorial eléctrico que aparece en estas ecuaciones satisface la ecuación de onda inhomogénea correspondiente a la segunda ecuación en (4):

$$\nabla^2 \vec{F} + k_0^2 \vec{F} = -\epsilon_0 \vec{M}_r, \tag{18}$$

donde se supuso una variación temporal de los campos de la forma armónica  $e^{i\omega t}$ . Si  $G(x, y, z, x', y', z')$  es

la función de Green para el interior del recinto, entonces la solución  $\vec{F}$  de (18) se puede escribir como

$$\vec{F} = \int dx' dy' dz' G(x, y, z, x', y', z') \vec{M}_r(x', y', z'). \tag{19}$$

Utilizando el procedimiento usual para resolver ecuaciones diferenciales inhomogéneas con el método de la función de Green, se obtiene las componentes del potencial vectorial eléctrico:

$$\begin{aligned}
F_x^x &= \sum_{\alpha\beta} \frac{\epsilon_0 \epsilon_0 m \epsilon_0 n U_{\alpha}}{k_I a b \text{sen}(k_I c)} \cos(k_I(z-c)) \\
&\quad \times \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta, x}, \\
F_y^y &= \sum_{\alpha\beta} \frac{\epsilon_0 \epsilon_0 m \epsilon_0 n V_{\alpha}}{k_I a b \text{sen}(k_I c)} \cos(k_I(z-c)) \\
&\quad \times \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta, y},
\end{aligned} \tag{20}$$

donde  $\alpha = (r, p, q)$  y  $\beta = (m, n)$  son los conjuntos de índices que se suman.

Utilizando las ecuaciones (12) y derivando parcialmente las componentes en  $x$  y en  $y$  del potencial vectorial eléctrico dados en (20), se tienen las componentes del campo eléctrico y magnético:

$$\begin{aligned}
E_x^x &= 0 \\
E_y^x &= \frac{1}{ab} \sum_{\alpha\beta} U_\alpha \frac{\epsilon_{0m}\epsilon_{0n}}{\text{sen}(k_I c)} \text{sen}(k_I(z-c)) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta,x} \\
E_z^x &= -\frac{\pi}{ab^2} \sum_{\alpha\beta} U_\alpha \frac{n\epsilon_{0m}\epsilon_{0n}}{k_I \text{sen}(k_I c)} \cos(k_I(z-c)) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta,x} \\
E_x^y &= -\frac{1}{ab} \sum_{\alpha\beta} V_\alpha \frac{\epsilon_{0m}\epsilon_{0n}}{\text{sen}(k_I c)} \text{sen}(k_I(z-c)) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta,y} \\
E_y^y &= 0 \\
E_z^y &= \frac{\pi}{a^2 b} \sum_{\alpha\beta} V_\alpha \frac{m\epsilon_{0m}\epsilon_{0n}}{k_I \text{sen}(k_I c)} \cos(k_I(z-c)) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta,y} \\
H_x^x &= -\frac{i\omega\epsilon_0}{abk_0^2} \sum_{\alpha\beta} U_\alpha \frac{\epsilon_{0m}\epsilon_{0n}}{k_I \text{sen}(k_I c)} \left(k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right) \cos(k_I(z-c)) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta,x} \\
H_y^x &= \frac{i\omega\epsilon_0\pi^2}{a^2 b^2 k_0^2} \sum_{\alpha\beta} U_\alpha \frac{mn\epsilon_{0m}\epsilon_{0n}}{k_I \text{sen}(k_I c)} \cos(k_I(z-c)) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta,x} \\
H_z^x &= \frac{i\omega\epsilon_0\pi}{a^2 b k_0^2} \sum_{\alpha\beta} U_\alpha \frac{m\epsilon_{0m}\epsilon_{0n}}{k_I \text{sen}(k_I c)} \text{sen}(k_I(z-c)) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta,x} \\
H_x^y &= \frac{i\omega\epsilon_0\pi^2}{a^2 b^2 k_0^2} \sum_{\alpha\beta} V_\alpha \frac{mn\epsilon_{0m}\epsilon_{0n}}{k_I \text{sen}(k_I c)} \cos(k_I(z-c)) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta,y} \\
H_y^y &= -\frac{i\omega\epsilon_0}{abk_0^2} \sum_{\alpha\beta} V_\alpha \frac{\epsilon_{0m}\epsilon_{0n}}{k_I \text{sen}(k_I c)} \left(k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right) \cos(k_I(z-c)) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta,y} \\
H_z^y &= \frac{i\omega\epsilon_0\pi}{ab^2 k_0^2} \sum_{\alpha\beta} V_\alpha \frac{n\epsilon_{0m}\epsilon_{0n}}{k_I \text{sen}(k_I c)} \text{sen}(k_I(z-c)) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta,y}
\end{aligned} \tag{21}$$

Hasta el momento parecería que las soluciones en las diferentes regiones del recinto (afuera y adentro) son distintas. Sin embargo, para tener una solución única del campo electromagnético en todo el espacio se debe satisfacer condiciones de continuidad sobre las superficies comunes (en este caso  $z = 0$ ). Así, las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético deben ser continuas en las aperturas para producir las ecuaciones integrales acopladas con las amplitudes de las corrientes magnéticas como incógnitas (Beck & Cockrell 2005). Estas ecuaciones que se obtienen en combinación con el método de momentos (ver, por ejemplo, Fernandez 2004 y Zozaya 2008) se pueden resolver para dichas amplitudes, como se detalla a continuación.

#### 4.3. Condiciones de continuidad

El campo magnético total dentro de la cavidad se escribe como:

$$\begin{aligned}
H_x &= H_x^x + H_x^y, \\
H_y &= H_y^x + H_y^y.
\end{aligned} \tag{22}$$

Utilizando la continuidad del campo magnético tangencial (Goudos & Samaras 2000) a través de las

aperturas ubicadas en el plano  $z = 0$ , se tiene:

$$H_x^i \Big|_{z=0} + H_x^r \Big|_{z=0} = H_x^x \Big|_{z=0} + H_x^y \Big|_{z=0}, \tag{23}$$

$$H_y^i \Big|_{z=0} + H_y^r \Big|_{z=0} = H_y^x \Big|_{z=0} + H_y^y \Big|_{z=0}. \tag{24}$$

Estas ecuaciones se obtuvieron suponiendo que sobre el recinto incide una onda plana desde  $z = -\infty$ . Usando las componentes del campo magnético en (16) junto con (21), y seleccionando a  $\Psi_{\alpha'x}$  para (23) y  $-\Phi_{\alpha'y}$  para (24) como funciones de prueba, se aplica el método de Galerkin (ver, por ejemplo, Andrade 1982) para reducir las ecuaciones (23) y (24):

$$I_{\alpha'x}^i = \sum_{\alpha} \left( U_{\alpha} Y_{\alpha\alpha'}^{xx} + V_{\alpha} Y_{\alpha\alpha'}^{xy} \right), \tag{25}$$

$$I_{\alpha'y}^i = \sum_{\alpha} \left( U_{\alpha} Y_{\alpha\alpha'}^{yx} + V_{\alpha} Y_{\alpha\alpha'}^{yy} \right), \tag{26}$$

donde:

$$\begin{aligned}
Y_{\alpha\alpha'}^{xx} &= -\frac{i\omega}{abk_0^2} \sum_{\beta} \frac{\epsilon_0\epsilon_0m\epsilon_0n}{k_I \text{sen}(k_Ic)} \left(k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right) \cos(k_Ic) I_{\alpha'\beta,x} I_{\alpha\beta,x} + \frac{\omega\epsilon_O}{4\pi^2k_0^2} \int dk_x dk_y \psi_{\alpha x} \psi_{\alpha'x}^* \left(\frac{k_0^2 - k_x^2}{k_z}\right), \\
Y_{\alpha\alpha'}^{xy} &= \frac{i\omega\pi^2}{a^2b^2k_0^2} \sum_{\beta} \frac{mn\epsilon_0\epsilon_0m\epsilon_0n}{k_I \text{sen}(k_Ic)} \cos(k_Ic) I_{\alpha'\beta,x} I_{\alpha\beta,y} + \frac{\omega\epsilon_O}{4\pi^2k_0^2} \int dk_x dk_y \phi_{\alpha y} \psi_{\alpha'x}^* \left(\frac{k_x k_y}{k_z}\right), \\
Y_{\alpha\alpha'}^{yx} &= -\frac{i\omega\pi^2}{abk_0^2} \sum_{\beta} \frac{\epsilon_0\epsilon_0m\epsilon_0n}{k_I \text{sen}(k_Ic)} \cos(k_Ic) I_{\alpha'\beta,y} I_{\alpha\beta,x} + \frac{\omega\epsilon_O}{4\pi^2k_0^2} \int dk_x dk_y \psi_{\alpha x} \phi_{\alpha'y}^* \left(\frac{k_x k_y}{k_z}\right), \\
Y_{\alpha\alpha'}^{yy} &= \frac{i\omega}{abk_0^2} \sum_{\beta} \frac{\epsilon_0\epsilon_0m\epsilon_0n}{k_I \text{sen}(k_Ic)} \left(k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right) \cos(k_Ic) I_{\alpha'\beta,y} I_{\alpha\beta,y} + \frac{\omega\epsilon_O}{4\pi^2k_0^2} \int dk_x dk_y \phi_{\alpha y} \phi_{\alpha'y}^* \left(\frac{k_0^2 - k_y^2}{k_z}\right),
\end{aligned} \tag{27}$$

además se pueden escribir las siguientes integrales (sobre la apertura) cuyo cálculo y resultados se muestran en los apéndices B y C:

$$\begin{aligned}
I_{\alpha'x}^i &= \int ds H_x^i \Psi_{\alpha'x}, \\
I_{\alpha'y}^i &= - \int ds H_y^i \Phi_{\alpha'y}, \\
\psi_{\alpha x} &= \int ds \Psi_{\alpha x} e^{ik_x x + ik_y y}, \\
\phi_{\alpha y} &= \int ds \Phi_{\alpha y} e^{ik_x x + ik_y y}, \\
I_{\alpha'\beta,x} &= \int ds \Psi_{\alpha'x} \text{sen}\left(\frac{m\pi(x' + x_{cr})}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi(y' + y_{cr})}{b}\right), \\
I_{\alpha'\beta,y} &= \int ds \Phi_{\alpha'y} \cos\left(\frac{m\pi(x' + x_{cr})}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi(y' + y_{cr})}{b}\right).
\end{aligned} \tag{28}$$

## 5. RESULTADOS

El resultado que corresponde al caso más sencillo es el de una onda electromagnética plana que incide de forma normal a la superficie metálica donde está la apertura. Otro resultado que se reporta es el del caso general de incidencia oblicua para cualquier dirección del vector  $\vec{k}^i$  en la figura 5. En ambos casos se calcula la distribución de la potencia promediada en el tiempo en el interior del recinto. Para efectos de la validación de las expresiones obtenidas en este trabajo, se tomó los límites de una longitud

de onda muy pequeña y, por otra parte, de un recinto muy grande comparados con el tamaño de la apertura. En estos dos casos los resultados coinciden con aquellos reportados en los textos (ver, por ejemplo, Hecht & Zajac 2003). Las simulaciones muestran las regiones más expuestas a los efectos de la interferencia y de aquí se interpretan los resultados obtenidos por este método. Vale la pena notar que el patrón de distribución de potencia sufre un corte abrupto (i.e., potencia nula) en la dirección transversal al plano de la apertura, lo que sugiere una analogía con el caso de longitud de onda pequeña; sin embargo, adentro de este “rayo” difractado se puede notar una distribución de potencia que no es intuitivamente predecible. Este efecto de corte es una consecuencia directa de las condiciones de contorno para el recinto metálico.

### 5.1. Caso de incidencia normal

Consideremos la incidencia normal de una onda plana sobre una apertura simple ubicada en el plano  $z = 0$ ; el campo magnético de esta onda está orientado a lo largo del eje  $x$  (cf. figura 5). En este caso en la ecuación (26)  $I_{\alpha'y}^i = 0$ . El cálculo de  $I_{\alpha'x}^i$  definida en (28) da como resultado (trasladando el origen del sistema de referencia al centro de la apertura):

$$I_{\alpha'x}^i = H_x^i L_r' W_r' (1 - \cos p'\pi) / p'\pi \tag{29}$$

para  $q' = 0$  y  $I_{\alpha'x}^i = 0$  para  $q' \neq 0$ .

El cálculo de  $Y_{\alpha\alpha'}^{xx}$  definida en (27) para el modo fundamental ( $\alpha = \alpha' = (1, 1, 0)$ ) da como resultado:

$$Y_{110110}^{xx} = -\frac{i\omega}{abk_0^2} \sum_{\beta} \frac{\epsilon_0\epsilon_0m\epsilon_0n}{k_I \text{sen}(k_Ic)} \left(k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right) \cos(k_Ic) I_{110\beta,x}^2 + \frac{\omega\epsilon_O}{4\pi^2k_0^2} \int dk_x dk_y \psi_{110x} \psi_{110x}^* \left(\frac{k_0^2 - k_x^2}{k_z}\right), \tag{30}$$

donde

$$I_{\alpha'x}^i = I_{110x}^i = \frac{2H_x^i LW}{\pi}, \tag{31}$$

$$\psi_{110x} \psi_{110x}^* = \left[ \frac{\pi L / k_y}{(\pi/2)^2 - (k_x L/2)^2} \text{sen}(k_y W/2) \cos(k_x L/2) \right]^2, \tag{32}$$

$$I_{110\beta,x} = \frac{4Lba^2}{n\pi^2(a^2 - m^2L^2)} \text{sen}(m\pi x_c/a) \cos(m\pi L/2a) \text{sen}(n\pi W/2b) \cos(n\pi y_c/b). \quad (33)$$

En forma análoga, de (27) se obtiene:  $Y_{110110}^{xy} = Y_{110110}^{yx} = Y_{110110}^{yy} = 0$ . Luego, las soluciones para las amplitudes son:  $U_{110} = I_{110x}^i/Y_{110110}^{xx}$ ,  $V_{110} = 0$ . Entonces, las componentes del campo electromagnético en el interior del recinto son:

$$E_x = E_x^x + E_x^y, \quad E_y = E_y^x + E_y^y, \quad E_z = E_z^x + E_z^y; \quad (34)$$

$$H_x = H_x^x + H_x^y, \quad H_y = H_y^x + H_y^y, \quad H_z = H_z^x + H_z^y. \quad (35)$$

Para el caso del modo fundamental, las componentes eléctrica y magnética con superíndice “y” son proporcionales a  $V_{110} = 0$  y por lo tanto se anulan. Reescribiendo explícitamente dichas componentes se tiene:

$$\begin{aligned} E_x &= 0, \\ E_y &= \frac{U_{110}}{ab} \sum_{\beta} \frac{\epsilon_0 m \epsilon_0 n}{\text{sen}(k_I c)} \text{sen}(k_I(z-c)) \text{sen}(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b) I_{110\beta x}, \\ E_z &= -\frac{U_{110}\pi}{ab^2} \sum_{\beta} \frac{n\epsilon_0 m \epsilon_0 n}{k_I \text{sen}(k_I c)} \cos(k_I(z-c)) \text{sen}(m\pi x/a) \text{sen}(n\pi y/b) I_{110\beta x}, \\ H_x &= -\frac{i\omega\epsilon_0 U_{110}}{abk_0^2} \sum_{\beta} \frac{\epsilon_0 m \epsilon_0 n}{k_I \text{sen}(k_I c)} \left(k_0^2 - (m\pi/a)^2\right) \cos(k_I(z-c)) \text{sen}(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b) I_{110\beta x}, \\ H_y &= \frac{i\omega\epsilon_0 \pi^2 U_{110}}{a^2 b^2 k_0^2} \sum_{\beta} \frac{mn\epsilon_0 m \epsilon_0 n}{k_I \text{sen}(k_I c)} \cos(k_I(z-c)) \cos(m\pi x/a) \text{sen}(n\pi y/b) I_{110\beta x}, \\ H_z &= \frac{i\omega\epsilon_0 \pi U_{110}}{a^2 b k_0^2} \sum_{\beta} \frac{m\epsilon_0 m \epsilon_0 n}{k_I \text{sen}(k_I c)} \text{sen}(k_I(z-c)) \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b) I_{110\beta x}. \end{aligned} \quad (36)$$

Finalmente, el vector de Poynting dentro del recinto será:

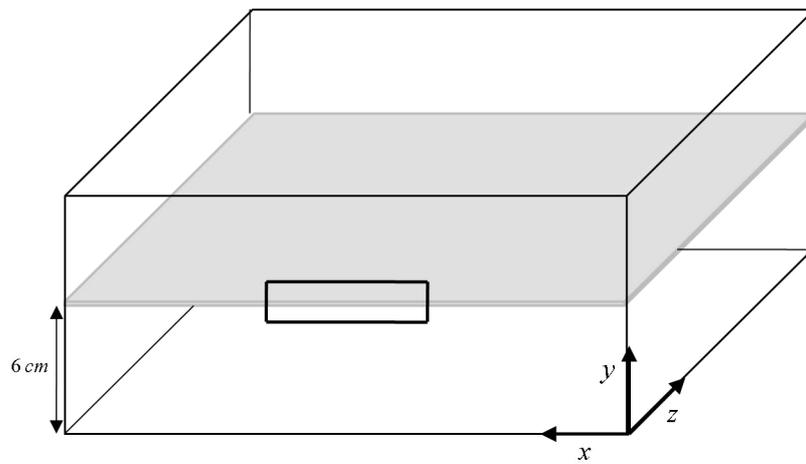
$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = (E_y H_z - E_z H_y) \hat{i} + E_z H_x \hat{j} - E_y H_x \hat{k}, \quad (37)$$

donde  $|\vec{S}| = \sqrt{\vec{S} \cdot \vec{S}^*}$ , con  $\vec{S}^*$  el conjugado del vector de Poynting.

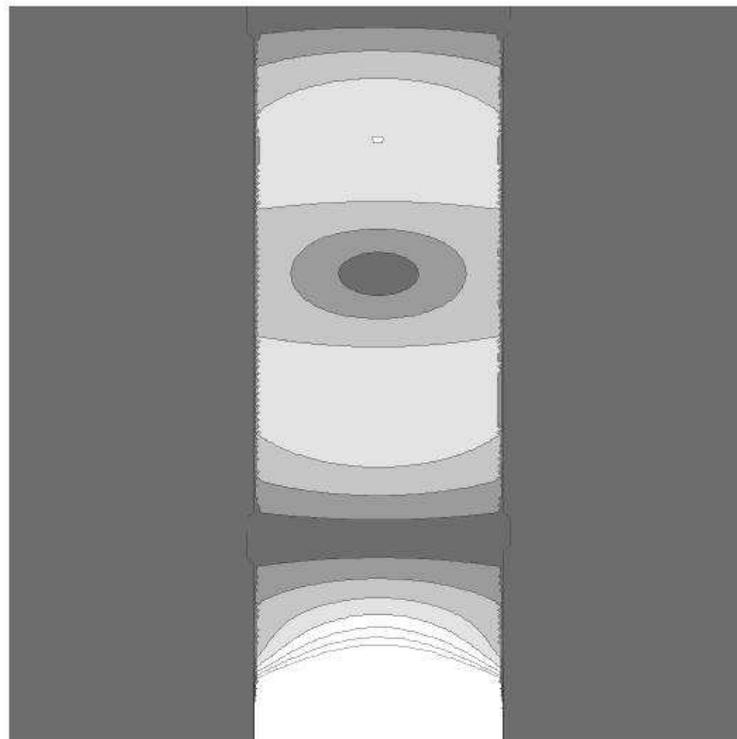
A continuación se realiza la simulación numérica para un caso específico que corresponde al recinto metálico descrito en la figura 6: una onda plana incide perpendicularmente sobre la cara  $z = 0$  con una única apertura rectangular ( $\vec{k}^i$  paralelo al eje  $z$ ). La frecuencia de la onda es 850 MHz. El campo magnético tiene magnitud 0.124 A/m y está orientado a lo largo del eje  $x$ . El recinto metálico rectangular tiene 30 cm de ancho, 12 cm de altura y 30 cm de profundidad. La apertura tiene 10 cm de ancho y 0.5 cm de altura y su centro coincide con el centro de la cara. En la figura 7 se muestra el resultado de la simulación para la distribución de la potencia electromagnética en el interior del recinto. La gráfica muestra las curvas de nivel de la magnitud del vector de Poynting  $|\vec{S}|$  en el plano  $xz$  a una altura  $y = 6$  cm.

Nótese que de acuerdo a las condiciones de (8), los valores de  $U_{\alpha}$  y  $V_{\alpha}$  implican que  $|\vec{S}| \neq 0$  si  $(x, y) \in$

apertura y  $|\vec{S}| = 0$  si  $(x, y) \notin$  apertura, lo que se traduce en un corte abrupto en la potencia electromagnética afuera de la región proyectada por la apertura hacia el interior del recinto. Adentro de esta región hay una distribución de potencia que no es homogénea y que disminuye de manera no-monótona, cuyos valores numéricos fueron calculados según los resultados analíticos de este trabajo. En la figura 8 se eliminó la condición de borde metálico de (8) y al mismo tiempo se hizo tender a infinito el tamaño del recinto (altura y ancho). Si se mantiene constante el tamaño de la apertura y se varía la longitud de onda de la radiación hacia valores cada vez más pequeños, se recupera los resultados conocidos para patrones de difracción (ver, por ejemplo, Hecht & Zajac 2003). En la figura 8a se observa el caso del patrón de difracción para una radiación incidente con longitud de onda  $\lambda = 0.35L$ , obteniéndose el patrón conocido cuando  $\lambda$  y  $L$  son similares. En los casos de las figuras 8b, 8c, y 8d se tiene que  $\lambda/L$  es igual a 0.01, 0.001, 0.0001 respectivamente. Como se puede ver en los casos (b), (c) y (d) de la figura 8, a medida que la longitud de onda decrece, el patrón de difracción tiende a aproximarse a la forma de la apertura. En la sección 7 (CONCLUSIONES) se especifica los valores numéricos correspondientes a este caso.



(a)



(b)

FIG. 7.— Distribución de potencia electromagnética en el interior del recinto metálico descrito en (a). El recinto tiene 30 cm de ancho, 30 cm de profundidad y 13 cm de altura; la apertura tiene 10 cm de ancho y 0.5 cm de altura. La onda electromagnética incidente está orientada a lo largo del eje  $x$  y tiene una longitud de onda  $\lambda=35$  cm. En el gráfico (b) se muestra esta distribución correspondiente al plano sombreado en el gráfico (a); las regiones claras corresponden a una mayor potencia de la radiación y las regiones oscuras a una menor potencia. Se puede notar en (b) que la distribución de potencia está definida en una región rectangular que es la proyección de la apertura hacia el interior del recinto; esto ocurre debido a la condición de borde de la apertura consistente con el modelo de guía de onda. Un aspecto relevante de esta distribución es que la disminución de potencia hacia el interior del recinto no es monótona.

### 5.2. Caso de incidencia oblicua

Para este caso, en el cual la onda electromagnética plana puede incidir con cualquier ángulo de inciden-

cia y orientación, las ecuaciones para  $I_{rppq_x}$  y  $I_{rppq_y}$ , en coordinación con el apéndice C, se reducen a:

$$I_{110x}^i = \frac{4\pi H^i (\cos \alpha_0 \cos \theta^i \cos \phi^i - \text{sen } \alpha_0 \text{sen } \phi^i) \cos(k_0 L/2 \text{sen } \theta^i \cos \phi^i) \text{sen}(k_0 W/2 \text{sen } \theta^i \text{sen } \phi^i)}{L k_0 \text{sen } \theta^i \text{sen } \phi^i ((\pi/L)^2 - (k_0 \text{sen } \theta^i \cos \phi^i)^2)} \times e^{-ik_0 \text{sen } \theta^i (\cos \phi^i x_c + \text{sen } \phi^i y_c)}, \quad (38)$$

$$I_{110y}^i = 0.$$

Por lo tanto, todos los resultados de la sección anterior se pueden utilizar ya que son independientes de los ángulos de incidencia y de orientación; se debe tomar en cuenta la ecuación (38) para las amplitudes  $U_{110}$ .

De (36) y (38) puede observarse que la distribución del campo electromagnético depende de los ángulos de incidencia  $\theta^i$ ,  $\phi^i$  y del ángulo de orientación  $\alpha_0$  del campo eléctrico. Podemos entonces calcular a continuación la potencia promedio del campo electromagnético para todos los ángulos de incidencia dentro de la semiesfera que abarca  $\Omega = 2\pi$  sterorradianes, i.e.,

$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \text{sen } \theta = 2\pi; \quad (39)$$

así, para una función  $f$  arbitraria, el promedio sobre dicha semiesfera es

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \text{sen } \theta f(\theta, \phi). \quad (40)$$

La potencia promedio  $\langle S \rangle$  es proporcional a  $\langle U_{110}^2 \rangle$  pues  $\phi^i$ ,  $\theta^i$  y  $\alpha_0$  sólo aparecen en  $U_{110}$  en (36); Así, ya que  $U_{110} \propto I_{110x}^i$  con la dependencia angular indicada en (38), entonces:

$$\langle S \rangle \propto \langle U_{110}^2 \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi^i \int_0^{\pi/2} d\theta^i \text{sen } \theta^i \times \int_0^{2\pi} d\alpha_0 U_{110}^2(\theta^i, \phi^i, \alpha_0). \quad (41)$$

Utilizando los resultados anteriores a un caso específico con las características mostradas en la figura 9, puede observarse una distribución de potencia electromagnética en las región proyectada desde la apertura hacia el interior del recinto; afuera de esta región la potencia es nula.

En general, la distribución de potencia electromagnética depende de los ángulos de incidencia ( $\theta^i$ ,  $\phi^i$ ) y de orientación ( $\alpha_0$ ), tal como se desprende de las ecuaciones (37) y (38) donde  $|\vec{S}| \propto I_{110x}^i$ . En la figura 10 se muestra el resultado para  $|\vec{S}|$  vs. ( $\theta^i$ ,  $\phi^i$ ), confirmando que la potencia es alta para una incidencia normal a la superficie con la apertura.

### 6. UN PROCEDIMIENTO HEURÍSTICO PARA LA SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA

Si bien en este trabajo se desarrolló un estudio analítico del problema en cuestión, éste también podría simularse numéricamente de manera aproximada. Esta simulación permitiría una verificación directa del efecto de "corte abrupto" de la distribución de potencia en el interior del recinto (cf. sección 5 - RESULTADOS y figuras 7 y 9), como una consecuencia de las condiciones de contorno del recinto. A continuación se da los pasos para un procedimiento heurístico que permita dicha simulación numérica:

1. Como aproximaciones fundamentales se supone: (a) que los efectos que pueda producir el campo magnético así como su variación temporal en la distribución de potencia son despreciables en comparación con los efectos debidos al campo eléctrico; (b) que el metal que conforma el recinto tiene conductividad infinita y por ello los electrones se acomodan instantáneamente para anular cualquier campo eléctrico en el metal.
2. Se divide un periodo de la onda electromagnética incidente en un cierto número  $N$  de intervalos temporales (digamos  $N \sim 100$ ) en donde se obtendrá soluciones estáticas para la distribución de potencia.
3. Se establece las condiciones de contorno para el potencial eléctrico ( $V$ ):  $V = 0$  (o cualquier otra constante) en la parte metálica del recinto, mientras que  $V(x, y, z = 0) \neq 0$  en la apertura se calcula a partir del campo eléctrico instantáneo en ese lugar.
4. Se resuelve numéricamente la ecuación de Laplace en el interior del recinto por el método de relajación. Se obtiene así  $V(x, y, z)$  que permite calcular el campo eléctrico instantáneo en el interior del recinto.
5. Se repite el cálculo para el siguiente intervalo temporal; sólo varía el campo eléctrico instantáneo en la apertura.

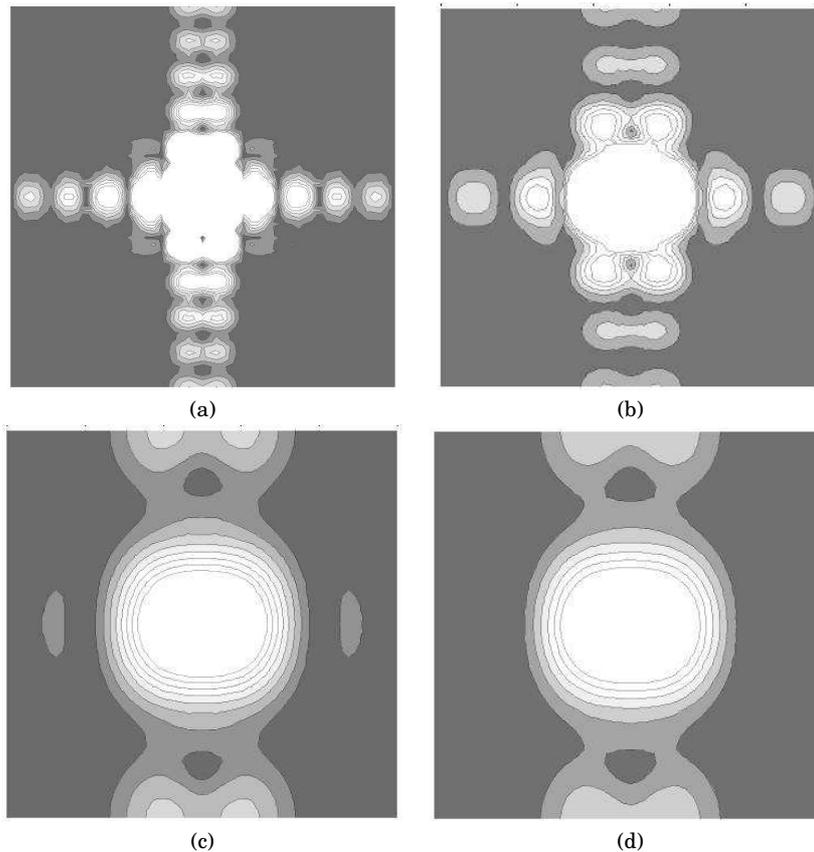


FIG. 8.— Patrón de difracción de la onda incidente en la figura 8. En este caso el plano en el que está la apertura no es conductor; su ancho y su altura son mucho mayores que el largo  $L$  de la apertura. En el gráfico (a) se observa el caso del patrón de difracción para una radiación incidente con longitud de onda  $\lambda = 0.35L$ , obteniéndose el patrón conocido cuando  $\lambda$  y  $L$  son similares. En los casos (b), (c), y (d) se tiene que  $\lambda/L$  es igual a 0.01, 0.001, 0.0001 respectivamente. Puede notarse que a medida que  $\lambda$  decrece con respecto a  $L$ , el patrón de difracción se localiza y tiende a adquirir la forma de la apertura, como debe ser (ver, por ejemplo, Hecht & Zajac 2003).

6. Después de  $N$  pasos de cálculo, se obtiene el promedio temporal de la potencia electromagnética en el interior del recinto correspondiente a un periodo de la onda incidente (entendiendo que sólo se está considerando la parte eléctrica de dicha potencia).

Este sencillo -aunque numéricamente voluminoso- procedimiento permite prever que en el caso de un recinto metálico, la condición de contorno  $V = 0$  “obliga” a  $V(x, y, z)$ , y de aquí, al campo eléctrico y a la potencia, a tomar valores numéricos pequeños en las proximidades del contorno metálico, lo que puede identificarse directamente como la causa del referido fenómeno de “corte abrupto”. Ciertamente, cuando se elimina la condición de contorno metálico ( $V = 0$ ), se espera entonces obtener una distribución espacial de potencia correspondiente al caso conocido de una apertura que funciona como un radiador efectivo de ondas electromagnéticas en todas las direcciones, que es lo que se observa en la figura 8.

La eventual comparación entre una simulación numérica y los resultados analíticos de este trabajo, permitiría saber si dicho efecto de “corte abrupto” es un resultado del modelo rectangular de guía de ondas o se trata de un efecto físico más general que podría ocurrir para cualquier forma de apertura y de recinto metálico. Este asunto se propone pues como

una perspectiva interesante para una próxima investigación.

## 7. CONCLUSIONES

En este trabajo se realizó una investigación analítica y numérica para hallar la distribución de potencia electromagnética en el interior de un recinto metálico, como consecuencia de la incidencia de una onda electromagnética plana a través de una apertura ubicada en una cara del recinto; éste es un paralelepípedo recto cuya apertura está ubicada en cualquier lugar de la cara frontal (figura 6).

El método analítico que se utiliza consiste de reemplazar las aperturas por fuentes de corrientes magnéticas que se integran para obtener los correspondientes potenciales vectoriales eléctrico y magnético, de donde se obtiene por diferenciación los campos eléctrico y magnético. La condición de contorno que corresponde al recinto metálico con una apertura rectangular se supone que se puede modelar por una guía de ondas rectangular, lo que permite obtener los campos eléctrico y magnético en estado estacionario. De aquí se obtiene la distribución de potencia electromagnética requerida. Cuando el tamaño de la apertura disminuye hasta desaparecer, se obtiene -como se espera- una potencia nula, que es el efecto de Jaula de Faraday.

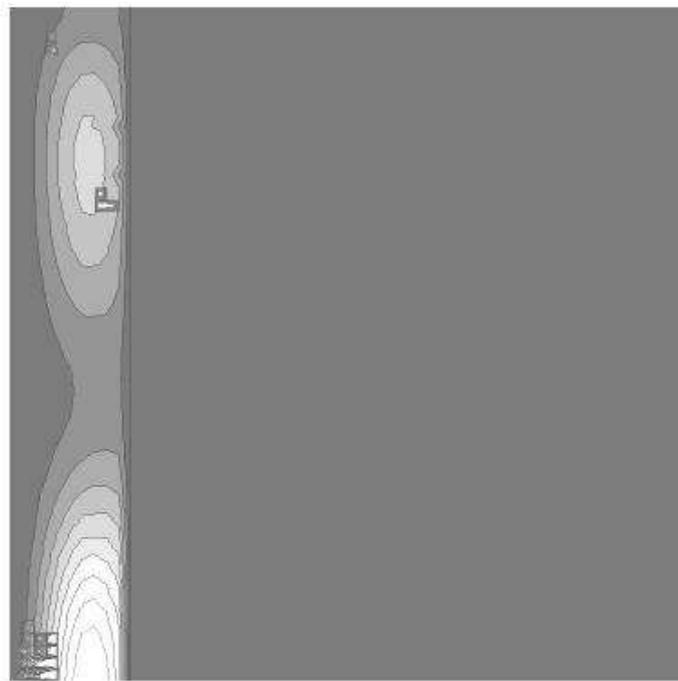
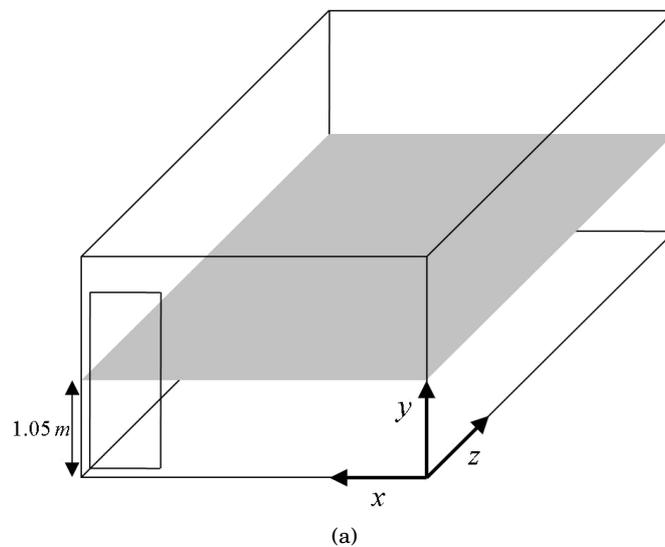


FIG. 9.— Distribución de potencia electromagnética en el interior del recinto metálico descrito en (a). El recinto tiene 6 m de ancho, 10 m de profundidad y 3 m de altura; la apertura tiene 1 m de ancho y 2 m de altura. La onda electromagnética incidente, a diferencia del caso de la figura 7, incide desde todas las direcciones posibles ( $2\pi$  sterorradianes) hacia la apertura vertical; la longitud de onda es  $\lambda=35$  cm. En el gráfico (b) se muestra esta distribución correspondiente al plano sombreado en el gráfico (a); al igual que en la figura 7, las regiones claras y oscuras corresponden a una mayor y menor potencia respectivamente. Las características cualitativas de este caso son las mismas que las de la figura 7, excepto que en este caso la incidencia de la radiación desde todas las direcciones posibles tiene el efecto de ser promediada y en consecuencia producir una distribución de potencia similar a la que se obtendría si la incidencia de la onda fuera normal.

El resultado central de este trabajo se muestra en la figura 7, donde, como esperaríamos, la potencia es mayor cerca de la apertura y va disminuyendo hacia el interior del recinto. Sin embargo, nótese que de manera interesante dicha disminución de potencia *no es monótona*, encontrándose regiones en donde la potencia aumenta y luego disminuye, lo que podría tener aplicaciones importantes en dispositivos metálicos que se usan como blindaje electromagnético.

A continuación, en la figura 8 se muestra el caso límite de una apertura que yace sobre un plano infinito no-conductor, es decir, se tomó el ancho y la altura del recinto de la figura 7a mucho mayores que el largo  $L$  de la apertura, eliminando además la condición de que este plano infinito sea metálico. Puede notarse que a medida que  $\lambda$  decrece con respecto a  $L$ , el patrón de difracción se localiza y tiende a adquirir la forma de la apertura, como debe ser (ver, por ejemplo, Hecht & Zajac 2003).

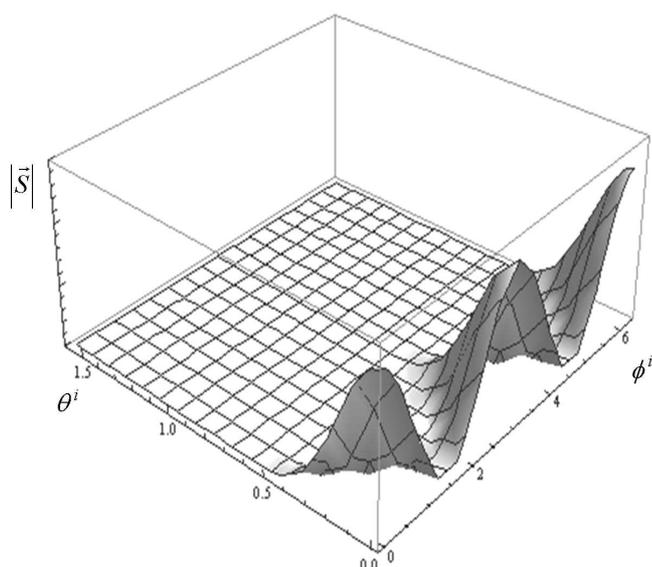


FIG. 10.— Distribución de potencia electromagnética en función del ángulo de incidencia y de la orientación del campo incidente. La dependencia de la potencia de los ángulos de incidencia está relacionada con la expresión  $I_{110x^i}^i$  dada en (38), que a su vez se relaciona con  $|\vec{S}|$  de acuerdo a (41). Esto es lo que se muestra en esta figura, donde el máximo que se presenta para  $\theta^i = 0$  corresponde a la incidencia normal, como era de esperar.

En la figura 9 se muestra la distribución de potencia electromagnética en el interior del recinto metálico descrito en (a). El recinto tiene 6 m de ancho, 10 m de profundidad y 3 m de altura; la apertura tiene 1 m de ancho y 2 m de altura. La onda electromagnética incidente, a diferencia del caso de la figura 7, incide desde todas las direcciones posibles ( $2\pi$  sterorradianes) hacia la apertura vertical; la longitud de onda es  $\lambda=35$  cm. En el gráfico (b) se muestra esta distribución correspondiente al plano sombreado en el gráfico (a); al igual que en la figura 7, las regiones claras y oscuras corresponden a una mayor y menor potencia respectivamente. Las características cualitativas de este caso son las mismas que las de la figura 7, excepto que en este caso la incidencia de la radiación desde todas las direcciones posibles tiene el efecto de ser promediada y en consecuencia producir una distribución de potencia similar a la que se obtendría si la incidencia de la onda fuera normal.

En general, la distribución de potencia electromagnética en el interior del recinto varía en función del ángulo de incidencia y de la orientación del campo incidente, sin embargo esta potencia es mayor conforme el ángulo de incidencia tiende a la normal. La dependencia de la potencia de los ángulos de incidencia está relacionada con la expresión  $I_{110x^i}^i$  dada en (38), que a su vez se relaciona con  $|\vec{S}|$  de acuerdo a (41). Esto es lo que se muestra en la figura 10, donde el máximo que se presenta para  $\theta^i = 0$  corresponde a la incidencia normal.

Señalemos finalmente que en este trabajo se obtuvo el efecto de Jaula de Faraday al hacer tender a cero el tamaño de la apertura en (21); se repro-

duce los campos correspondientes a una guía de onda rectangular extendiendo hacia el infinito la profundidad del recinto metálico y haciendo que las dimensiones de las aperturas coincidan con las de la cara frontal del recinto. De este modo se logra reproducir analíticamente el campo electromagnético de una guía de ondas rectangular. Podemos concluir que el modelo propuesto en este trabajo satisface analíticamente las condiciones límite requeridas, además de proporcionar resultados numéricos novedosos que pueden ser verificados experimentalmente.

#### AGRADECIMIENTOS

Uno de nosotros (E.M.) agradece el desinteresado apoyo del Dr. Gustavo Demarco (Centro Atómico de Bariloche, Argentina), quien gentilmente proporcionó sugerencias e información valiosa para desarrollar este trabajo.

#### APÉNDICE

##### A. Corrientes magnéticas equivalentes

Para establecer el método de resolución de problemas de radiación por medio de las corrientes magnéticas equivalentes, veamos dos teoremas de la teoría electromagnética que justifican este método.

**Teorema de Unicidad :** *Dado un volumen  $V$  encerrado por una superficie  $S$  en cuyo interior no hay fuentes de ningún tipo, si se conocen las componentes tangenciales en  $S$  de  $\vec{E}$  o de  $\vec{H}$  producidas por las fuentes exteriores a  $V$ , entonces la solución que se obtenga para cualquier punto de  $V$  es única.*

Este teorema establece las condiciones que se deben cumplir para garantizar que la solución a un problema regido por las ecuaciones de Maxwell sea único. Esto es importante y especialmente útil en los problemas que se resuelven sin emplear las fuentes reales y empleando en su lugar un conjunto de corrientes equivalentes, cuyas características quedarán claras a continuación cuando se enuncie el teorema de equivalencia.

**Teorema de Equivalencia :** *Toda fuente (corriente) originada por  $\vec{E}$  o  $\vec{H}$  se puede sustituir por otra fuente equivalente que conduzca a la misma solución de las ecuaciones de Maxwell en una región determinada.*

El teorema de equivalencia se apoya en el teorema de unicidad cuando establece cómo son estas corrientes equivalentes ya que deben elegirse de modo que se obtenga la misma solución que con las fuentes originales.

Observando la figura 1 de este apéndice y suponiendo que las únicas fuentes presentes son las encerradas por la superficie  $S$ , los campos eléctrico y magnético en el exterior de  $S$  se pueden calcular a partir de las corrientes  $\vec{J}$ , o bien, por el teorema de unicidad, si se conocen las componentes tangenciales

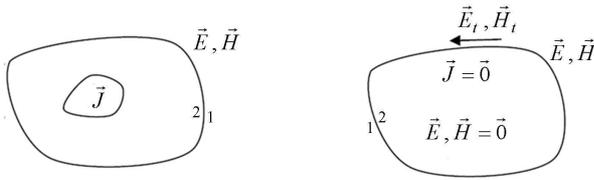


FIG. 1.— Cálculo del campo electromagnético cuando se tiene una fuente encerrada por una superficie  $S$ .

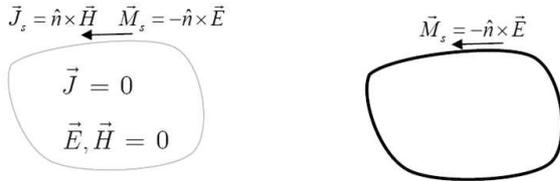


FIG. 2.— Corrientes equivalentes en la superficie limitante del problema.

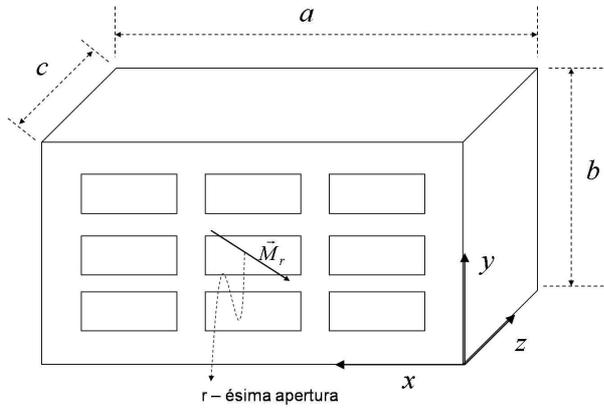


FIG. 3.— Equivalencia de las aperturas y las corrientes magnéticas.

a  $S$  de los campos eléctrico y magnético también será posible obtener dicha solución en el exterior de  $S$ . Luego, si eliminamos las fuentes originales y añadimos unas nuevas, éstas deben asegurar que se satisfagan las condiciones de contorno existentes en  $S$ . Con este propósito podemos escoger como corrientes equivalentes las proporcionadas por las condiciones de contorno generalizadas y que están

asociadas a la existencia de una discontinuidad en el campo eléctrico y magnético tangencial  $\vec{M}_s = -\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)$  y  $\vec{J}_s = \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)$ , siendo 1 el medio externo, 2 el medio interno y  $\hat{n}$  un vector unitario que apunta a la región donde se desea obtener la solución, en este caso la región 1.

Dado que sólo estamos interesados en obtener la solución en el medio 1, es posible simplificar la obtención de las corrientes equivalentes obligando a que el campo en la región 2 (región interna) sea nulo. En este caso podemos escribir las corrientes equivalentes de manera más sencilla como:

$$\vec{M}_s = -\vec{n} \times \vec{E}_t \quad y \quad \vec{J}_s = \vec{n} \times \vec{H}_t.$$

Alternativamente, también es posible utilizar un modelo de equivalencia en el que la región interna se rellena de un conductor perfecto, lo que "cortocircuita" las corrientes eléctricas equivalentes.

En el primer caso de la figura 2 (de este apéndice) las corrientes equivalentes  $\vec{J}_s$  y  $\vec{M}_s$  emiten radiación en el espacio libre. En el segundo caso, las corrientes  $\vec{M}_s$  también radian en presencia de un cuerpo metálico con superficie  $S$ . El teorema de equivalencia asegura que eligiendo las corrientes como se ha indicado, ambos problemas proporcionan la misma solución y, además, ésta es igual a la que proporciona el problema original en la misma región.

Una de las aplicaciones más comunes corresponde al caso de superficies conductoras con aperturas. Las condiciones de contorno en una superficie perfectamente conductora son:

$$\vec{n} \times \vec{E} = \vec{0} \quad y \quad \vec{n} \cdot \vec{H} = 0,$$

con  $\vec{n} \cdot \vec{E} \neq 0$  y  $\vec{n} \times \vec{H} \neq \vec{0}$ . Por ello, según Jackson (Jackson 1996), al querer calcular el campo electromagnético, que es una integral en toda la superficie que rodea el volumen del cuerpo conductor, conviene extender dicha integral solamente a las aperturas en lugar de toda la superficie. En la figura 3 (de este apéndice) se observa un recinto metálico con aperturas rectangulares que se reemplazan por fuentes de corrientes magnéticas.

## B. Transformada de Fourier de $\phi_{\alpha y}$ y $\psi_{\alpha x}$

La integral de las ecuaciones (17) a lo largo de las aperturas da como resultado:

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha y}(k_x, k_y) &= \frac{L_r W_r e^{ik_x x_{cr} + ik_y y_{cr}}}{4i} e^{i(p+q)\pi/2} \left( \frac{\text{sen}\left(\frac{p\pi}{2} + \frac{k_x L_r}{2}\right)}{p\pi/2 + k_x L_r/2} + \frac{e^{-ip\pi} \text{sen}\left(\frac{p\pi}{2} - \frac{k_x L_r}{2}\right)}{p\pi/2 - k_x L_r/2} \right) \\ &\times \left( \frac{\text{sen}\left(\frac{q\pi}{2} + \frac{k_y W_r}{2}\right)}{q\pi/2 + k_y W_r/2} - \frac{e^{-iq\pi} \text{sen}\left(\frac{q\pi}{2} - \frac{k_y W_r}{2}\right)}{q\pi/2 - k_y W_r/2} \right), \end{aligned}$$

$$\psi_{\alpha x}(k_x, k_y) = \frac{L_r W_r e^{ik_x x_{cr} + ik_y y_{cr}}}{4i} e^{i(p+q)\pi/2} \left( \frac{\sin(\frac{p\pi}{2} + \frac{k_x L_r}{2})}{p\pi/2 + k_x L_r/2} + \frac{e^{-ip\pi} \sin(\frac{p\pi}{2} - \frac{k_x L_r}{2})}{p\pi/2 - k_x L_r/2} \right) \\ \times \left( \frac{\sin(\frac{q\pi}{2} + \frac{k_y W_r}{2})}{q\pi/2 + k_y W_r/2} + \frac{e^{-iq\pi} \sin(\frac{q\pi}{2} - \frac{k_y W_r}{2})}{q\pi/2 - k_y W_r/2} \right).$$

### C. Cálculo de $I_{\alpha\beta,x}$ y $I_{\alpha\beta,y}$

La integral de las ecuaciones (28) a lo largo de las aperturas da como resultado:

$$I_{\alpha\beta,x} = np\pi^2 L_r \left( \cos(p\pi) \sin\left(\frac{m\pi}{a}(x_{cr} + \frac{L_r}{2})\right) + \sin\left(\frac{m\pi}{a}\left(\frac{L_r}{2} - x_{cr}\right)\right) \right) \\ \times \left( \cos(q\pi) \sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(y_{cr} + \frac{W_r}{2}\right)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(\frac{W_r}{2} - y_{cr}\right)\right) \right) \\ \times \frac{1}{b((p\pi)^2 - (m\pi L_r/a)^2)((q\pi/W_r)^2 - (n\pi/b)^2)}, \\ I_{\alpha\beta,y} = mq\pi^2 W_r \left( \cos(q\pi) \sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(y_{cr} + \frac{W_r}{2}\right)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(\frac{W_r}{2} - y_{cr}\right)\right) \right) \\ \times \left( \cos(p\pi) \sin\left(\frac{m\pi}{a}\left(x_{cr} + \frac{L_r}{2}\right)\right) + \sin\left(\frac{m\pi}{a}\left(\frac{L_r}{2} - x_{cr}\right)\right) \right) \\ \times \frac{1}{a((q\pi)^2 - (n\pi W_r/b)^2)((p\pi/L_r)^2 - (m\pi/a)^2)},$$

$$I_{\alpha'x}^i = iH^i (\cos \alpha_0 \cos \theta^i \cos \phi^i - \sin \alpha_0 \sin \phi^i) (1 - \cos(p'\pi) e^{-ik_0 \sin \theta^i \cos \phi^i L_{r'}}) (1 - \cos(q'\pi) e^{-ik_0 \sin \theta^i \sin \phi^i W_{r'}}) \\ \times \frac{p'\pi/L_{r'} e^{-ik_0 \sin \theta^i (\cos \phi^i x_{cr'} + \sin \phi^i y_{cr'})} k_0 \sin \theta^i \sin \phi^i e^{ik_0 \sin \theta^i (\cos \phi^i L_{r'} + \sin \phi^i W_{r'})/2}}{(p'\pi/L_{r'})^2 - (k_0 \sin \theta^i \cos \phi^i)^2 (q'\pi/W_{r'})^2 - (k_0 \sin \theta^i \sin \phi^i)^2},$$

$$I_{\alpha'y}^i = -iH^i (\cos \alpha_0 \cos \theta^i \sin \phi^i + \sin \alpha_0 \cos \phi^i) (1 - \cos(p'\pi) e^{-ik_0 \sin \theta^i \cos \phi^i L_{r'}}) (1 - \cos(q'\pi) e^{-ik_0 \sin \theta^i \sin \phi^i W_{r'}}) \\ \times \frac{q'\pi/W_{r'} e^{-ik_0 \sin \theta^i (\cos \phi^i x_{cr'} + \sin \phi^i y_{cr'})} k_0 \sin \theta^i \cos \phi^i e^{ik_0 \sin \theta^i (\cos \phi^i L_{r'} + \sin \phi^i W_{r'})/2}}{(p'\pi/L_{r'})^2 - (k_0 \sin \theta^i \cos \phi^i)^2 (q'\pi/W_{r'})^2 - (k_0 \sin \theta^i \sin \phi^i)^2}.$$

### REFERENCIAS

- Ali, Z., Bunting, F., & Deshpande, M. 2005, IEEE Trans. Electromag. Compat. **47**, 112
- Andrade, F. S. 1982, Galerkin Method and the Solution of the Orr-Sommerfeld Equation (Instituto de Física, Universidad Federal de la Bahia, Salvador - Brazil)
- Arvas, E. & Harrington, R. F. 1983, IEEE Trans. Antennas Propagat. **AP-31-5**, 719
- Balanis, C. 1985, Advanced Engineering Electromagnetics (Academic Press - U.S.A.)
- Beck, F. B. & Cockrell, C. R. 2005, Electromagnetic shielding effectiveness of rectangular enclosure with perforated walls (NASA Langley Research Center, Hampton)
- Bethe, H. A. 1944, Phys. Rev. **66**, 163
- Cerri, G. & Primiani, V. M. 1992, IEEE Trans. Electromag. Compat. **34**, 423
- Chalmer, M., Butler, Y., & Samil, R. 1978, IEEE Transactions on electromagnetic and propagation **26**, 82
- Collin, R. 1980, Field Theory of Guided Waves (Prentice Hall - U.S.A.)
- Dawson, J. F., Robinson, M. P., Thomas, D. W. P., Ganley, M. D., Marvin, A. C., Porter, S. J., Benson, T. M., & Christopolous, J. F. 1998, IEEE Trans. Electromag. Compat. **40**, 240
- Fernandez, J. C. 2004, Electromagnetismo (Universidad de Buenos Aires - Argentina)
- Gardner, C. L. & Costache, G. I. 1995, IEEE Trans. Electromag. Compat. **37**, 5
- Goudos, S. K. & Samaras, T. 2000, IEEE Trans. Electromag. Compat. **35**, 120
- Hecht, E. & Zajac, A. 2003, Optics (Ed. Alhambra - España)
- Jackson, J. D. 1996, Electrodinámica Clásica (Ed. Alhambra - España)
- Khan, Z., Bunting, C., & Deshpande, M. 2005, IEEE Trans. on Electromag. Compat. **47**, 113
- Kimmel, M. & Singer, H. 1995, IEEE Electromag. Compat. **14**, 208
- McDonald, N. A. 1985, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. **MTT-33-11**, 1146
- Robinson, M. P., Turner, J. D., Thomas, D. W. P., Dawson, J. F., Ganley, M. D., Marvin, A. C., Porter, S. J., Benson, T. M., & Christopolous, J. F. 1996, IEEE Trans. on Electromag. **17**, 32
- Sewell, P., Turner, D., Robinson, M., & Benson, T. 1998, IEEE Proc. - Sci. Meas. Technol. **145**, 62
- Wallyn, W. & Zutter, D. D. 2001, IEEE Electromag. Compat. **13**, 691
- Wangsness, R. 1994, Campos Electromagnéticos (Noriega Editores, Ed. Limusa - México)
- Zozaya, A. 2008, Método de los Momentos (LABEMA, Universidad de Carabobo - Venezuela)